

基于分解法的 Neumann 边界条件反散射问题*

刘颖, 刘立汉

重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331

摘要: 利用分解法研究 Neumann 边界条件下障碍物反散射问题和腔体反散射问题. 该方法利用近场测量数据可以同时处理障碍物反散射问题和腔体反散射问题, 而不需要对测量面和散射体之间的距离做任何渐近假设. 首先给出两个反散射问题的数学模型, 以及利用双层势能算子的跳跃关系和格林公式给出双层势能算子的相关估计结果. 其次通过定义算子分别研究障碍物和腔体近场算子的分解情况. 最后构造障碍物和腔体在 Neumann 边界条件下的成像函数.

关键词: 反散射; 近场测量; 分解法

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2024)03-0172-07

The factorization method for the inverse scattering problem with Neumann boundary conditions

LIU Ying, LIU Lihan

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: The inverse scattering problem for obstacles and cavities with Neumann boundary conditions is studied by using the factorization method. The data from near-field measurements is used to deal with both inverse scattering for obstacles and cavities without making any asymptotic assumption about the distance between the measured surface and the scatterers. Firstly, mathematical model for the inverse scattering problem is given, and the results of the estimation of the double-layer operator are given by using the jump relation of the double-layer potential and Green's formula. Secondly, the decomposition of the near-field operators of obstacles and cavities is studied separately. Finally, the imaging function of obstacles and cavities under Neumann boundary conditions is constructed.

Key words: inverse scattering; near-field measurements; the factorization method

反散射问题在地球物理勘探、医学成像、无损检测等领域中有着重要作用. 重构散射体形状是反散射问题的研究热点之一 (Leem et al., 2018; Cakoni et al., 2019; Haddar et al., 2020; Zhang et al., 2020), 包括 Dirichlet 边界条件、阻抗边界条件和混合型边界条件下确定腔体的位置、形状及其物理性质 (Qin et al., 2012a, 2012b; Hu et al., 2014), Dirichlet 边界条件或阻抗边界条件下障碍物的成像问题 (Chen et al., 2013), 非均匀介质下散射体的成像问题等 (Ito et al., 2012). 对于不同情况下的散射体形状重构, 可使用不同的采

* 收稿日期: 2023-06-04 录用日期: 2023-12-23 网络首发日期: 2024-03-29

基金项目: 国家自然科学基金(12001075); 重庆市自然科学基金(cstc2020jcyj-msxmX0167);
重庆市教育委员会科学技术研究项目重点项目(KJZD-K202300506, KJZD-K202100503);
重庆市留学人员回国创新类项目(cx2021061, cx2019022); 重庆市巴渝学者计划(BYQNCS2020002);
重庆市高校创新研究群体项目(CXQT20014)

作者简介: 刘颖(1997年生), 女; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: 2417260937@qq.com

通信作者: 刘立汉(1987年生), 男; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: 20132130@cqnu.edu.cn

样方法, 而经典的采样方法包括线性采样法(Colton et al., 1996)和分解法(Kirsch, 1998, 1999), 近年来也提出了其它一些采样方法, 如正交采样方法(Harris et al., 2020)、直接采样方法(Ito et al., 2012)、反向时间迁移法(Chen et al., 2013)等.

但在已有的研究中, 国内外学者大多是只单独研究障碍物反散射或腔体反散射, 很少统一研究障碍物反散射和腔体反散射, 而Liu et al.(2022)则将这两个问题统一在一个框架下研究. 受Liu et al.(2022)的启发, 本文利用分解法研究Neumann边界条件下障碍物的反散射问题和腔体的反散射问题, 该方法不需要对测量面和散射体之间的距离作出任何渐近假设.

1 反散射问题和双层势能算子估计

1.1 数学模型

本文考虑两个经典反散射问题: 障碍物的反散射问题和腔体反散射问题. 令波数 $k > 0$, 点源 $\varphi(x, y)$ 在 y 处具有以下形式:

$$\varphi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(k|x-y|), \quad x \neq y,$$

其中 H_0^1 是第一类零阶的Hankel函数(Colton et al., 2013).

令 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是一个有界开区域, 并且边界 $\partial\Omega$ 属于 C^2 , 本文将区域 Ω 称为障碍物. 在Neumann边界条件下障碍物的散射问题就是去求散射场 $u^s(\cdot, y)$ 使得

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, & \text{在 } \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \text{ 内,} \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu} - iku^s \right) = 0, \end{cases}$$

其中 ν 表示 $\partial\Omega$ 的单位向外的法向量. 令 $\partial B := \{x \mid |x| = r_0, r_0 > 0\}$ 是测量表面且 $B := \{x \mid |x| < r_0, r_0 > 0\}$ 包含障碍物 Ω , 有关说明请参见图1. 则反问题是根据以下近场测量数据去确定 $\partial\Omega$:

$$\{u^s(x, y) \mid x, y \in \partial B\}.$$

这个反问题具有唯一解(Colton et al., 2013).

令 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是一个连通的有界开区域, 并且边界 ∂D 属于 C^2 , 本文将区域 D 称为腔体. 在Neumann边界条件下腔体的散射问题就是去求散射场 $u^s(\cdot, y)$ 使得

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 u^s = 0, & \text{在 } D \text{ 内,} \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} \end{cases}$$

其中 ν 表示 ∂D 的单位向外的法向量. 如果 k^2 不是区域 D 内 $-\Delta$ 的特征值, 那么这个问题是适定的(Qin et al., 2012a, 2012b). 令 $\partial C := \{x \mid |x| = r_i, r_i > 0\}$ 是测量表面且 $C := \{x \mid |x| < r_i, r_i > 0\}$ 在 D 的内部, 有关说明请参见图1. 则反问题是根据以下近场测量结果去确定 ∂D :

$$\{u^s(x, y) \mid x, y \in \partial C\}.$$

在腔体的反散射问题中, 若假设 k^2 在区域 D 和 C 中不是 $-\Delta$ 的特征值, 则这个问题有唯一解(Qin et al., 2012a, 2012b).

1.2 双层势能算子的估计

假设 k^2 不是区域 Ω 或 D 内 $-\Delta$ 的特征值, 令 Γ 是边界 $\partial\Omega$ 或 ∂D , 定义算子 $T_\Gamma: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$:

$$T_\Gamma g = h, \quad (1)$$

其中对任意的 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$ 是

$$g(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_\Gamma h(y) \frac{\partial \overline{\varphi(x, y)}}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \Gamma \quad (2)$$

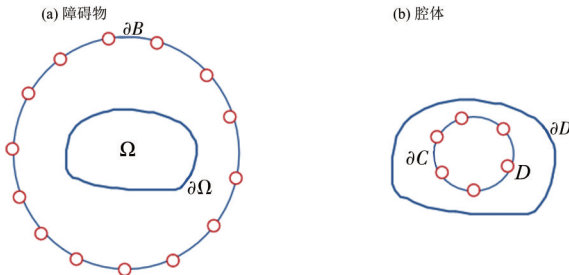


图1 障碍物的反散射和腔体的反散射 $\partial\Omega$
Fig. 1 Inverse scattering for obstacles and cavities

的唯一解(McLean, 2000; Kirsch et al., 2007; Cakoni et al., 2014).

引理 1 Γ 是边界 $\partial\Omega$ 或 ∂D , 对于任意 $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, 有

$$\left| \langle T_{\Gamma} g, g \rangle_{\Gamma} \right| \geq c_0 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表 $H^{-1/2}(\Gamma)$ 和 $H^{1/2}(\Gamma)$ 之间的对偶积.

证明 本文仅证明 $\Gamma = \partial\Omega$ 的情况, 对于 $\Gamma = \partial D$ 可类似证明.

首先证明

$$-\text{Im} \langle T_{\Gamma} g, g \rangle_{\Gamma} < 0, \quad \forall g \neq 0. \quad (3)$$

令 $w(x) = \int_{\partial\Omega} h(y) \frac{\partial \overline{\varphi(x, y)}}{\partial \nu(y)} ds(y)$, $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \partial\Omega$. 对于 $x \in \partial\Omega$, 由双层势能算子的跳跃关系, 有 $h = w_+ - w_-$, $g = \frac{\partial w}{\partial \nu}$. 在本文中, 下标 (\pm) 分别表示来自外部 $(+)$ 和内部 $(-)$ 的极限.

令 $B_R = \{x \mid |x| < R\}$ 包括障碍物 Ω , 可得

$$\begin{aligned} -\text{Im} \langle T_{\Gamma} g, g \rangle_{\Gamma} &= \text{Im} \langle \overline{h}, g \rangle_{\Gamma} = \text{Im} \left\langle \bar{w}_+ - \bar{w}_-, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \text{Im} \left(\int_{|x|=R} \frac{\partial w}{\partial \nu} \bar{w} ds - \int_{|x|<R} (|\nabla w|^2 - k^2 |w|^2) dx \right) \\ &= \text{Im} \int_{|x|=R} \frac{\partial w}{\partial \nu} \bar{w} ds. \end{aligned}$$

假设 $-\text{Im} \langle T_{\Gamma} g, g \rangle_{\Gamma} = \text{Im} \int_{|x|=R} \frac{\partial w}{\partial \nu} \bar{w} ds \geq 0$. 由于 \bar{w} 是 Helmholtz 方程在 $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{B}_R$ 中的辐射解, 由 Colton et al. (2013) 可知在 $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{B}_R$ 中 $\bar{w} = 0$. 然后利用解的唯一延拓性, 可知在 $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ 中 $\bar{w} = 0$, 因此 $\bar{w}|_{\partial\Omega} = 0$. 又由于 w 满足 Helmholtz 方程且假设 k^2 不是区域 Ω 内 $-\Delta$ 的特征值, 所以在 Ω 中 $w = 0$.

在 $\mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ 中 $\bar{w} = 0$, 由双层势能算子的跳跃关系可知 $h = 0$, 故 $g = 0$ 与假设矛盾. 所以式(3)得证. 其次 T_{Γ} 是严格强制自伴随算子和紧算子的和, 根据 Colton et al. (2013) 的结果可得出结论

$$\left| \langle T_{\Gamma} g, g \rangle_{\Gamma} \right| \geq c_0 \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

2 障碍物反散射问题

2.1 近场算子及其分解

引入近场算子 $N: L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial B)$ 为

$$(Ng)(x) := \int_{\partial B} u^s(x, y) g(y) ds(y), \quad x \in \partial B.$$

定义算子 $H: H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial B)$ 为

$$(Hg)(x) := \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial\Omega} \overline{\varphi(x, y)} g(y) ds(y), \quad x \in \partial B,$$

它的伴随算子 $H^*: L^2(\partial B) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 为

$$(H^*h)(x) := \int_{\partial B} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \nu(y)} h(y) ds(y), \quad x \in \partial\Omega.$$

定义算子 $K: H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 为

$$(K\eta)(x) := \frac{\partial \eta}{\partial \nu(x)}.$$

对于复 Banach 空间中的任意函数, 定义共轭算子 $R: Rg = \bar{g}$.

定理 1 近场算子有如下分解情况:

$$N = -K^{-1} R H T_{\partial\Omega} K R H^*,$$

其中 $T_{\partial\Omega}: H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 由式(1)~(2)定义.

证明 设 $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$, 则 $w(x) := \int_{\partial B} u^s(x, y)g(y)ds(y)$. 于是由 H^* 的定义和叠加原理可得

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 w &= 0, \text{ 在 } \mathbf{R}^2 \setminus \bar{\Omega} \text{ 内,} \\ \frac{\partial w}{\partial \nu(x)} &= -H^* g, \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{aligned}$$

w 满足 Sommerfeld 辐射条件, 接下来去求未知密度 $\xi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, 使得

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x, y)\xi(y)ds(y).$$

因为 w 在边界 $\partial\Omega$ 上, 所以有

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \nu(y)} \xi(y)ds(y) = -H^* g, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.}$$

取上述方程的共轭值, 得

$$\int_{\partial\Omega} \overline{\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \nu(y)}} \xi(y)ds(y) = -\overline{H^* g}, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.}$$

由算子 K 的定义有

$$K\left(\int_{\partial\Omega} \overline{\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \nu(y)}} \xi(y)ds(y)\right) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial\Omega} \overline{\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \nu(y)}} \xi(y)ds(y) = -K(\overline{H^* g}), \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.}$$

根据 $T_{\partial\Omega}$ 的定义, $\bar{\xi} = T_{\partial\Omega}(-K\overline{H^* g}) = T_{\partial\Omega}(-KRH^* g)$.

因此对于任意 $x \in \partial B$, 有

$$\begin{aligned} (KNg)(x) &= Kw(x) = R\overline{Kw} = RK \int_{\partial\Omega} \overline{\varphi(x, y)\xi(y)}ds(y) \\ &= RK \int_{\partial\Omega} \overline{\varphi(x, y)}(T_{\partial\Omega}(-KRH^* g))ds(y) \\ &= R \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial\Omega} \overline{\varphi(x, y)}(T_{\partial\Omega}(-KRH^* g))ds(y) \\ &= RHT_{\partial\Omega}(-KRH^* g), \end{aligned}$$

所以 $N = -K^{-1}RHT_{\partial\Omega}KRH^*$ 得证.

2.2 成像函数

定义成像函数 I_{obstacle} :

$$I_{\text{obstacle}}(z) := \left| \langle KN\phi_z, K\bar{\phi}_z \rangle_{\partial B} \right|,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表 $L^2(\partial B)$ 中的内积. ϕ_z 由以下定义

$$\phi_z(y) := \sum_{n=-M}^M \frac{4}{i|y|\pi(1+\delta_{0n})} \frac{J_n(k|z|)}{H_n^{(1)}(k|y|)} \cos(n\theta_{yz}), \quad y \in \partial B, \quad (4)$$

其中 M 是 1 个正整数, θ_{xy} 表示任意 $x, y \in \mathbf{R}^2$ 之间的夹角. 另外定义式(4)无限级数的情况:

$$\phi_{z,\infty}(y) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{i|y|\pi(1+\delta_{0n})} \frac{J_n(k|z|)}{H_n^{(1)}(k|y|)} \cos(n\theta_{yz}), \quad y \in \partial B.$$

注: 函数 $\phi_{z,\infty}$ 是收敛的. $H_n^{(1)}(k|y|) = H_n^{(1)}(kr_0) \neq 0$, $\phi_z(y)$ 有定义. 令 $M \rightarrow +\infty$, 可从 Hankel 函数和 Bessel 函数的渐近性得到:

$$H_n^{(1)}(kr_0) \sim \frac{2^n(n-1)!}{\pi i(kr_0)^n}, \quad J_n(k|z|) \sim \frac{k|z|^n}{2^n n!}, \quad n \gg 1.$$

由此可推出

$$\frac{J_n(k|z|)}{H_n^{(1)}(k|y|)} \sim \frac{k|z|^n \pi i (kr_0)^n}{2^n n! 2^n (n-1)!},$$

因此 $\phi_{z,\infty}$ 对于有界采样区域内的采样点 z 是收敛的.

定理 2 $H^* \phi_z(x)$ 和 $H^* \phi_{z,\infty}(x)$ 的显性表达式如下:

$$(H^* \phi_z)(x) = \sum_{n=-M}^M \frac{\partial J_n(k|x|)}{\partial \nu} J_n(k|z|) \cos(n\theta_{xz}), \quad x \in \partial\Omega, \tag{5}$$

$$(H^* \phi_{z,\infty})(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial J_n(k|x|)}{\partial \nu} J_n(k|z|) \cos(n\theta_{xz}) = \frac{\partial J_0(k|x-z|)}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{6}$$

证明 首先证明式(5). 从 Colton et al.(2013)可知

$$\varphi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(k|x-y|) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k|y|) J_n(k|x|) \cos(n\theta_{xy}), \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \partial B.$$

由算子 H^* 和 $\phi_z(x)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} (H^* \phi_z)(x) &= \int_{\partial B} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \nu} \phi_z(y) ds(y) \\ &= r_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \left(\frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k|r_0|) J_n(k|x|) \cos(n\theta_{xy}) \right)}{\partial \nu} \times \left(\sum_{m=-M}^M \frac{4}{ir_0(1+\delta_{0m})\pi} \frac{J_m(k|z|)}{H_m^{(1)}(k|r_0|)} \cos(m\theta_{yz}) \right) d\theta_y \\ &= \sum_{n=-M}^M \frac{\partial J_n(k|x|)}{\partial \nu} J_n(k|z|) \cos(n\theta_{xz}), \end{aligned}$$

其中在最后一步时, 利用了三角函数系的正交性

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta_{xy}) \cos(m\theta_{yz}) d\theta_y \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n\theta_x) \cos(n\theta_y) + \sin(n\theta_x) \sin(n\theta_y)) (\cos(m\theta_z) \cos(m\theta_y) + \sin(m\theta_z) \sin(m\theta_y)) d\theta_y \\ &= \pi(1 + \delta_{0n}) \delta_{mn} [\cos(n\theta_x) \cos(n\theta_z) + \sin(n\theta_x) \sin(n\theta_z) \pi] \\ &= \pi(1 + \delta_{0n}) \delta_{mn} \cos(n\theta_{xz}). \end{aligned}$$

令 $M \rightarrow +\infty$, 利用 Bessel 函数的渐近展开 (Colton, 2013) 可证明

$$(H^* \phi_{z,\infty})(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial J_n(k|x|)}{\partial \nu} J_n(k|z|) \cos(n\theta_{xz}), \quad x \in \partial\Omega,$$

并且在有界采样区域内 x 和 z 的收敛是一致的.

$$H_0^{(1)}(k|x-z|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k|z|) J_n(k|x|) \cos(n\theta_{xz}),$$

取上述方程的实部得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k|x|) J_n(k|z|) \cos(n\theta_{xz}) = J_0(k|x-z|), \quad x \in \partial\Omega.$$

因此式(6)得证.

定理 3 z 是 \mathbf{R}^2 中的一个采样点, 存在与 z 无关的正常数 c'_1, c''_1, c'_2, c''_2 , 使得

$$c'_1 \|KH^* \phi_z\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq |I_{\text{obstacle}}(z)| \leq c'_2 \|KH^* \phi_z\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \tag{7}$$

$$c''_1 \|KH^* \phi_{z,\infty}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq |I_{\text{obstacle}}(z)| \leq c''_2 \|KH^* \phi_{z,\infty}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{8}$$

证明 根据 N 的分解, 有

$$\begin{aligned} -\langle KN\phi_z, K\overline{\phi_z} \rangle_{\partial B} &= \langle RHT_{\partial\Omega} KRH^* \phi_z, K\overline{\phi_z} \rangle_{\partial B} = \overline{\langle HT_{\partial\Omega} KRH^* \phi_z, K\phi_z \rangle_{\partial B}} \\ &= \overline{\langle T_{\partial\Omega} KRH^* \phi_z, H^* K\phi_z \rangle_{\partial\Omega}} = \langle T_{\partial\Omega} KRH^* \phi_z, KH^* \phi_z \rangle_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

根据定理 2 可知, $H^* \phi_z(x)$ 在 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 中是一个实值函数, 因此

$$|I_{\text{obstacle}}(z)| = |\langle T_{\partial\Omega} KH^* \phi_z, KH^* \phi_z \rangle|.$$

由引理 1 可得

$$|I_{\text{obstacle}}(z)| = |\langle T_{\partial\Omega} KH^* \phi_z, KH^* \phi_z \rangle| \geq c'_1 \|KH^* \phi_z\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

因为 $T_{\partial\Omega}$ 是有界的, 故 $|I_{\text{obstacle}}(z)| \leq c'_2 \|KH^* \phi_z\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. 因此式(7)得证. 使用完全相同的方法, 用 $\phi_{z,\infty}$ 代替 ϕ_z 时, 式(8)也成立.

3 腔体反散射问题

3.1 近场算子及其分解

引入近场算子 $N_{\partial C}: L^2(\partial C) \rightarrow L^2(\partial C)$

$$(N_{\partial C}g)(x) := \int_{\partial C} u^*(x, y)g(y)ds(y), \quad x \in \partial C.$$

定义算子 $S: H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L^2(\partial C)$

$$(Sg)(x) := \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)} \int_{\partial D} \overline{\varphi(x, y)} g(y)ds(y), \quad x \in \partial C,$$

它的伴随算子 $S^*: L^2(\partial C) \rightarrow H^{1/2}(\partial D)$ 为

$$(S^*h)(x) := \int_{\partial C} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} h(y)ds(y), \quad x \in \partial D.$$

定理4 近场算子有如下分解情况:

$$N_{\partial C} = -K^{-1}ST_{\partial D}KS^*,$$

其中 $T_{\partial D}: H^{1/2}(\partial D) \rightarrow H^{-1/2}(\partial D)$ 由式(1)~(2)定义.

证明 该定理的证明方法和定理1类似. 设 $x \in D$, 有 $w(x) := \int_{\partial C} u^*(x, y)g(y)ds(y)$. 则由 S^* 的定义和叠加原理可得

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 w &= 0, \text{ 在 } D \text{ 内,} \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}(x)} &= -S^*g, \text{ 在 } \partial D \text{ 上.} \end{aligned}$$

接下来去求未知密度 $\xi \in H^{-1/2}(\partial D)$, 使得

$$w(x) = \int_{\partial D} \overline{\varphi(x, y)} \xi(y)ds(y).$$

因为 w 在边界 ∂D 上, 有

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \overline{\varphi(x, y)}}{\partial \boldsymbol{\nu}(y)} \xi(y)ds(y) = -S^*g, \text{ 在 } \partial D \text{ 上.}$$

根据 $T_{\partial D}$ 的定义, 有 $\xi = T_{\partial D}(-KS^*g)$. 因此对于任意 $x \in \partial C$, 有

$$(KN_{\partial C}g)(x) = Kw(x) = K \int_{\partial D} \overline{\varphi(x, y)} \xi(y)ds(y) = K \int_{\partial D} \overline{\varphi(x, y)} T_{\partial D}(-KS^*g)ds(y) = -ST_{\partial D}KS^*g,$$

所以 $N_{\partial C} = -K^{-1}ST_{\partial D}KS^*$ 得证.

3.2 成像函数

定义成像函数 I_{cavity} :

$$I_{\text{cavity}}(z) := \left| \langle KN_{\partial C}\psi_z, K\psi_z \rangle_{\partial C} \right|,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表 $L^2(\partial C)$ 中的内积. ψ_z 由以下定义

$$\psi_z(y) := \sum_{n=-M}^M \frac{4}{i|y|\pi(1+\delta_{0n})} \frac{J_n(k|z|)}{J_n(k|y|)} \cos(n\theta_{yz}), \quad y \in \partial C, \quad (9)$$

其中 M 是一个正整数, k^2 不是区域 C 内 $-\Delta$ 的特征值, 因此 $J_n(k|y|) = J_n(kr_i) \neq 0$, 式(9)有定义.

定理5 存在与 z 无关的正常数 c_1, c_2 , 使得

$$c_1 \|KS^*\psi_z\|_{H^{1/2}(\partial D)} \leq |I_{\text{cavity}}(z)| \leq c_2 \|KS^*\psi_z\|_{H^{1/2}(\partial D)}. \quad (10)$$

证明 根据 $N_{\partial C}$ 的分解, 有

$$-\langle KN_{\partial C}\psi_z, K\psi_z \rangle_{\partial C} = \langle ST_{\partial D}KS^*\psi_z, K\psi_z \rangle_{\partial C} = \langle T_{\partial D}KS^*\psi_z, S^*K\psi_z \rangle_{\partial D} = \langle T_{\partial D}KS^*\psi_z, KS^*\psi_z \rangle_{\partial D}.$$

由引理1可得

$$|I_{\text{cavity}}(z)| = \left| \langle T_{\partial D}KS^*\psi_z, KS^*\psi_z \rangle_{\partial D} \right| \geq c_1 \|KS^*\psi_z\|_{H^{1/2}(\partial D)}.$$

因为 $T_{\partial D}$ 是有界的, 所以 $|I_{\text{cavity}}(z)| \leq c_2 \|KS^*\psi_z\|_{H^{1/2}(\partial D)}$. 因此式(10)得证.

定理 6 $S^* \psi_z(x)$ 的显性表达式如下:

$$(S^* \psi_z)(x) = \sum_{n=-M}^M \frac{\partial H_n^{(1)}(k|x|)}{\partial \nu} J_n(k|z|) \cos(n\theta_{xz}), \quad x \in \partial D. \quad (11)$$

证明 从 Colton et al.(2013)可知

$$\varphi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(k|x-y|) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k|x|) J_n(k|y|) \cos(n\theta_{xy}), \quad x \in \partial D, \quad y \in \partial C.$$

由算子 S^* 和 $\psi_z(x)$ 的定义有

$$\begin{aligned} (S^* \psi_z)(x) &= \int_{\partial C} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial \nu} \psi_z(y) ds(y) \\ &= r_i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \left(\frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(1)}(k|x|) J_n(kr_i) \cos(n\theta_{xy}) \right)}{\partial \nu} \times \left(\sum_{m=-M}^M \frac{4}{ir_i(1+\delta_{0m})\pi} \frac{J_m(k|z|)}{J_m(kr_i)} \cos(m\theta_{yz}) \right) d\theta_y \\ &= \sum_{n=-M}^M \frac{\partial H_n^{(1)}(k|x|)}{\partial \nu} J_n(k|z|) \cos(n\theta_{xz}). \end{aligned}$$

因此式(11)得证.

参考文献:

- CAKONI F, COLTON D, 2014. A qualitative approach to inverse scattering theory[M]. Boston: Springer.
- CAKONI F, HADDAR H, LECHLEITER A, 2019. On the factorization method for a far field inverse scattering problem in the time domain[J]. SIAM J Math Anal, 51(2): 854-872.
- CHEN J, CHEN Z, HUANG G, 2013. Reverse time migration for extended obstacles: Acoustic waves[J]. Inverse Probl, 29(8): 085005.
- COLTON D, KIRSCH A, 1996. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region[J]. Inverse Probl, 12(4): 383-393.
- COLTON D, KRESS R, 2013. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[M]. New York: Springer.
- HADDAR H, KONSCHIN A, 2020. Factorization method for imaging a local perturbation in inhomogeneous periodic layers from far field measurements[J]. Inverse Probl Imag, 14(1): 133-152.
- HARRIS I, NGUYEN D L, 2020. Orthogonality sampling method for the electromagnetic inverse scattering problem[J]. SIAM J Sci Comput, 42(3): B722-B737.
- HU Y, CAKONI F, LIU J, 2014. The inverse scattering problem for a partially coated cavity with interior measurements[J]. Appl Anal, 93(5): 936-956.
- ITO K, JIN B, ZOU J, 2012. A direct sampling method to an inverse medium scattering problem[J]. Inverse Probl, 28(2): 025003.
- KIRSCH A, 1998. Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator[J]. Inverse Probl, 14(6): 1489-1512.
- KIRSCH A, 1999. Factorization of the far-field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory[J]. Inverse Probl, 15(2): 413-429.
- KIRSCH A, GRINBERG N, 2007. The factorization method for inverse problems[M]. Oxford: Oxford University Press.
- LEEM K H, LIU J, PELEKANOS G, 2018. Two direct factorization methods for inverse scattering problems[J]. Inverse Probl, 34(12): 125004.
- LIU X D, MENG S X, ZHANG B, 2022. Modified sampling method with near field measurements[J]. SIAM J Appl Math, 82(1): 244-266.
- McLEAN W, 2000. Strongly elliptic systems and boundary integral equations[M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- QIN H H, COLTON D, 2012a. The inverse scattering problem for cavities with impedance boundary condition[J]. Adv Comput Math, 36(2): 157-174.
- QIN H H, COLTON D, 2012b. The inverse scattering problem for cavities[J]. Appl Numer Math, 62(6): 699-708.
- ZHANG B, ZHANG H, 2020. An approximate factorization method for inverse acoustic scattering with phaseless total-field data[J]. SIAM J Appl Math, 80(5): 2271-2298.

(责任编辑 冯兆永)